**Université Lille 1 - Sciences et Technologies**
**Master Mathématiques Recherche, Semestre 3 (2014-15)**
**Homologue et Topologie**
**Problèmes, Feuille 1**

Compléments et rappels d'algèbre linéaire

## 1. Problème : suites exactes et diagrammes

Soit $A$ un anneau de base (éventuellement commutatif, par exemple $A = \mathbb{Z}$). On dit qu'une suite de morphismes de $A$-modules

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} M_n$$

est *exacte* si on a $im\, f_i = ker\, f_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$. (On note que cette hypothèse entraine $f_{i+1} \circ f_i = 0$.)

Une suite de la forme

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0\ ,$$

dans laquelle on considère le morphisme nul $0 \to M'$ (qui a pour image le sous-module trivial de $M'$) et le morphisme nul $M'' \to 0$ (qui a pour noyau le module $M''$ tout entier), est exacte quand $ker(f) = 0$ (donc $f$ est injectif), $im(f) = ker(g)$ et $im(g) = M''$ (donc $g$ est surjectif).

Un carré de morphismes de $A$-modules

$$\begin{tikzcd} M_{00} \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "g_0"'] & M_{10} \arrow[d, "g_1"'] \\ M_{01} \arrow[r, "f_1"] & M_{11} \end{tikzcd}$$

est *commutatif* si on a $f_1 \circ g_0 = g_1 \circ f_0$.

**1.1) Lemme des cinq :** On se donne un diagramme

$$\begin{tikzcd} M_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_0"'] & M_1 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "u_2"'] & M_3 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_3"'] & M_4 \arrow[d, "u_4"'] \\ N_0 \arrow[r, "g_1"] & N_1 \arrow[r, "g_2"] & N_2 \arrow[r, "g_3"] & N_3 \arrow[r, "g_4"] & N_4 \end{tikzcd}$$

constitué de carrés commutatifs (on dit que le diagramme est commutatif) et dont les lignes forment des suites exactes. On suppose que $u_0$ est surjectif, $u_1$ et $u_3$ sont bijectifs, $u_4$ est injectif. Montrer que $u_2$ est bijectif.

**1.2) Lemme du serpent :** On se donne un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "u_3"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g_1"] & N_2 \arrow[r, "g_2"] & N_3 & \end{tikzcd}$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

et dont les lignes sont exactes. Construire une suite exacte :

$$ker(u_1) \to ker(u_2) \to ker(u_3) \to coker(v_1) \to coker(v_2) \to coker(v_3).$$

**2. Problème : suites exactes courtes**

On dit qu'une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

est scindée quand il existe un morphisme de $A$-modules $s : M'' \to M$ tel que $g \circ s = Id_{M''}$. Observer que l'existence d'un scindage $s : M'' \to M$ équivaut à l'existence d'un morphisme $u : M' \oplus M'' \to M$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "="] & M' \oplus M'' \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "u"] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

commutatif. (*Remarque:* On considère ici une somme directe "abstraite", telle que $M' \oplus M'' := M' \times M''$, et qui est définie sans regarder de $M'$ et $M''$ comme des sous-modules de quelque module ambiant que ce soit). Que peut-on conclure de la question 1 de l'exercice 2 quant à ce morphisme $u$?

**2.1)** Montrer que les suites exactes courtes dont le $A$-module de droite $M''$ est libre sont scindées. Si on suppose que $M''$ est libre de type fini ainsi que $M'$, alors que peut-on en conclure quant au module $M$?

*Application:* Retrouver un résultat classique concernant le rang et la dimension du noyau d'un morphisme d'espaces vectoriels $f : U \to V$ en considérant la suite

$$0 \longrightarrow ker\, f \longrightarrow U \xrightarrow{f} im\, f \longrightarrow 0.$$

**2.2)** Déterminer l'ensemble des suites exactes courtes de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2 \longrightarrow 0$$

(*Remarque:* On pourra utiliser le résultat de la question suivante qui affirme que $M$ possède 4 éléments.) Utiliser ce résultat pour donner un ou des exemples de suites exactes courtes qui ne sont pas scindées.

**2.3)** On se donne une suite exacte courte de $\mathbb{Z}$-modules

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

telle que $M'$ et $M''$ sont finis. On veut montrer que $M$ est également fini de cardinal $\mathrm{card}\, M = \mathrm{card}\, M' \cdot \mathrm{card}\, M''$ : observer que les classes d'équivalences de $M$ modulo $M'$ sont en bijections avec les éléments de $M''$ et conclure.

**3. Problème : morphismes et suites exactes**

On note $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ l'ensemble des morphismes de $A$-modules $u : M \to N$, que l'on munit de sa structure de $A$-module habituelle. Pour tout morphisme $f : M \to M'$, on note $f^* : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$ l'application telle que $f^*(u) = uf$. Pour tout morphisme $g : N \to N'$, on note $g_* : \mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_A(M,N')$ l'application telle que $g_*(u) = gu$.

On verra que ces applications font de $\mathrm{Hom}_A(-,-)$ un bifoncteurs sur la catégorie des $A$-modules. On utilise le mot foncteur informellement pour le moment.

**3.1)** On se donne une suite exacte courte de $A$-modules

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

Montrer que le foncteur $\mathrm{Hom}_A(M,-)$ envoie cette suite sur une suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M,N'') \longrightarrow 0$$

qui est exacte à gauche (jusqu'à l'avant dernier terme), mais que l'application

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M,N'')$$

n'est pas surjective en général.

Dualement, si on se donne une suite exacte courte de $A$-modules

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

alors la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M'',N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N) \longrightarrow 0$$

est exacte à gauche (jusqu'à l'avant dernier terme), mais l'application

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_A(M',N)$$

n'est pas surjective en général.

Références :


1. N. Bourbaki, *Éléments de mathématiques. Algèbre, chapitres I-III*, Masson, 1970. Chapitre II.
2. N. Jacobson, *Basic algebra II*, seconde édition, W. H. Freeman and Company, 1980. Chapitre 3.