Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Master Mathématiques Recherche, Semestre 3 (2014-15)
Homologue et Topologie
Problèmes, Feuille 2

§0. Révisions et/ou compléments de cours

Soit X un espace topologique. Soit R une relation d'équivalence sur X. On forme l'ensemble quotient sous cette relation d'équivalence X/R. On note $q : X \to X/R$ l'application canonique qui envoie un élément $x \in X$ sur sa classe d'équivalence $[x]$ pour la relation R.

On munit X/R d'une topologie, avec comme ouverts les sous ensembles de classes $V \subset X/R$ tels que $q^{-1}(V)$ forme une partie ouverte dans X. (On vérifie aisément, en utilisant les propriétés générales des images inverses, que cette ensemble de parties ouvertes satisfait bien les axiomes d'une topologie.) L'application $q : X \to X/R$ est continue par définition. En outre, on constate aisément que toute application continue $f : X \to Y$ telle que $xRy \Rightarrow f(x) = f(y)$ induit par passage au quotient une application $\bar{f} : X/R \to Y$ qui est continue pour notre topologie sur X/R.

Dans le cours, on utilisera principalement l'opération de quotient pour recoller des espaces. Dans ce contexte, on se contente généralement de donner des relations $a \simeq b$ qui engendrent notre relation déquivalence R par application des règles de réflexivité, symétrie et transitivité. On dit aussi que le passage au quotient X/R permet d'effectuer l'identification $a \simeq b$. On verra des exemples de telles constructions dans la section suivante.

Les quotients d'espaces par X des actions (continues) de groupes (continus ou discrets) G fournissent une seconde classe d'espaces quotients classiques utilisés en topologie X/G. L'espace projectif $\mathbb{K}P^n$ réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (respectivement, complexe $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) s'identifie ainsi au quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)\}$ par l'action du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^\times$ telle que $\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ pour tour $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. La classe d'un élément $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{K}P^n$ est habituellement notée $[x_0 : \dots : x_n]$.

1. Exercice

Vérifier que l'espace $\mathbb{R} \times \{0\} \amalg \mathbb{R} \times \{1\} / \simeq$ où $\simeq$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations $(x, 0) \simeq (x, 1)$, pour $x \neq 0$, n'est pas séparé (au sens de Hausdorff).

2. Exercice

Vérifier que l'espace projectif réel $\mathbb{R}P^n$ (respectivement, complexe $\mathbb{C}P^n$) possède une structure de variété topologique de dimension n (respectivement, $2n$). Pour cela, on considère généralement les sous-ensembles tels que $D_i = \{[x_0 : \dots : x_n], x_i \neq 0\}$, $i = 0, \dots, n$. On pourra aisément expliciter des homéomorphismes $\phi_i : D_i \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}^n$ et les changements de cartes correspondants $\phi_i \phi_j^{-1}$ pour conclure.

3. Exercice

3.1) On utilise

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

comme modèle de référence pour la sphère de dimension $n-1$. On munit la sphère S^n de la relation d'équivalence $x \equiv -x$. Montrer que l'on a un homéomorphisme $S^n/\equiv \xrightarrow{\simeq} \mathbb{R}P^n$.

3.2) On veut démontrer un analogue du résultat précédent dans le cas complexe. On prend

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1},\ |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

comme modèle de la sphère de dimension $2n+1$. On fait agir le cercle $C = S^1$ continûment sur S^{2n+1} en posant

$$e^{i\theta}(z_1, \cdots, z_{n+1}) = (e^{i\theta} z_1, \cdots, e^{i\theta} z_{n+1}).$$

Montrer que l'on a un homéomorphisme

$$S^{2n+1}/C \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P^n.$$

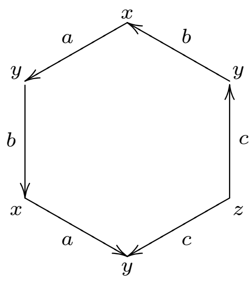
Pour $n = 1$, on a $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ et ce résultat donne un homéomorphisme $S^3/C \simeq S^2$.

4. Problème !

Soit P_{2n} un polygône à $2n$ sommets v_i, $i = 0, \ldots, 2n-1$, et $2n$ arêtes $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i = 1, \ldots, 2n$, où on pose par convention $v_{2n} = v_0$. On se donne une permutation de l'ensemble des arêtes $\tau : \{e_1, \ldots, e_{2n}\} \xrightarrow{\simeq} \{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ telle que $\tau^2 = \mathrm{id}$, de sorte que cette permutation est équivalente à un produit de transpositions à supports disjoints $\tau = (e_{i_1}\ e_{j_1}) \cdot \ldots \cdot (e_{i_n}\ e_{j_n})$.

On munit chaque arête e_i d'une orientation, en la dirigeant d'un sommet source $s(e_i) \in \{v_{i-1}, v_i\}$ vers un sommet but $b(e_i) \in \{v_{i-1}, v_i\}$ (que l'on peut choisir de façon arbitraire). On considère l'espace $S = P_{2n}/\simeq$ obtenu en effectuant les identifications point par point $(1-t) \cdot s(e_{i_k}) + t \cdot b(e_{i_k}) \simeq (1-t) \cdot s(e_{j_k}) + t \cdot b(e_{j_k})$, $t \in [0,1]$, pour chaque couple d'arêtes en relation $e_{j_k} = \tau(e_{i_k}) \Leftrightarrow e_{i_k} = \tau(e_{j_k})$.

Expliciter des voisinages ouverts de chaque point $[x] \in P_{2n}/\simeq$ homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^2$ pour vérifier que cet espace $P_{2n}/\simeq$ possède une structure de variété topologique de dimension 2 (voir ci-dessous pour l'image d'un exemple). On se concentrera sur les difficultés de la construction (il n'est pas nécessaire de détailler les points qui ne posent pas de problème).



§1. Quotients et identifications

Dans les exercices qui suivent, on se donne un espace topologique B, un sous espace $A \subset B$ et une application continue $f : A \to X$. On notera $i : A \to B$ l'application d'inclusion. On considère l'espace $B \cup_f X$ obtenu en faisant l'identification $a \simeq f(a)$ des éléments $a \in A$ avec leur image $f(a) \in X$ par f dans la réunion disjointe $A \amalg X$. On a des applications naturelles $g : B \to B \cup_f X$ et $j : X \to B \cup_f X$ telles que $gi = jf$.

On observe aisément que $Y = B \cup_f X$ satisfait la propriété suivante : tout diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & X \arrow[d, dotted, "j"] \arrow[ddr, bend left, "v"] & \\
B \arrow[r, dotted, "g"'] \arrow[drr, bend right, "u"'] & Y \arrow[dr, dotted, "w"] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

possède un *unique* morphisme pointillé $w : Y \to Z$ qui le complète. On dit alors que le diagramme (*) forme un carré cocartésien (on parle aussi de somme amalgamée).

On considèrera également des quotients d'espaces B/A que l'on définit comme les cas particuliers de cette construction où X est réduit à un point $X = \{pt\}$ et $f : A \to pt$ est l'application constante. On dit aussi dans ce cas que B/A est l'espace obtenu en identifiant A à un seul point.

5. Exercice
5.1) Montrer que la propriété universelle caractérise la somme amalgamée $Y = B \cup_f X$: si on a un espace Y' qui vérifie la même propriété, alors on peut construire des applications continues $w : Y \to Y'$ et $w' : Y' \to Y$ telles que $w'w = \mathrm{id}$ et $ww' = \mathrm{id}$.
5.2) Expliciter la propriété universelle du quotient B/A.

6. Exercice
Identifier l'espace $]-\infty, 0] \cup_i [0, +\infty[$, où $i : \{0\} \to [0, +\infty[$ est l'application naturelle $i(0) = 0$.

7. Problème (le cercle dans tout ses états)
On utilise
$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } x^2 + y^2 = 1\}$$
comme modèle de référence pour le cercle.
7.1) Montrer que l'on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \arrow[r] \arrow[d] & {[0,1]} \arrow[d, dotted] \\
{[0,1]} \arrow[r, dotted] & S^1
\end{tikzcd}$$

7.2) Montrer que l'on a un homéomorphisme $[0,1]/\{0,1\} \xrightarrow{\cong} S^1$.
7.3) Montrer que l'on a un homéomorphisme $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ou l'application exponentielle.

8. Problème (la sphère dans tout ses états)
On utilise
$$S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
comme modèle de référence pour la sphère de dimension $n-1$ et
$$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$
comme modèle de référence pour la boule de dimension n.
8.1) Montrer que l'on a un homéomorphisme $S^{n-1} \times [0,1]/S^{n-1} \times \{0\} \xrightarrow{\cong} D^n$.
8.2) Montrer que l'on a un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd}
S^{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & D^n \arrow[d, dotted] \\
D^n \arrow[r, dotted] & S^n
\end{tikzcd}$$

8.3) Montrer que l'on a un homéomorphisme $D^n/S^{n-1} \xrightarrow{\cong} S^n$.

9. Problème

On utilise

$$S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

comme modèle de référence pour la sphère de dimension $n-1$. Utiliser l'application quotient $p : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ de l'exercice 3 pour construire un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[d, dotted] \\ D^n \arrow[r, dotted] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

10. Problème

On veut démontrer un analogue du résultat précédent pour les espaces projectifs complexes. On prend

$$S^{2n-1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$$

comme modèle de la sphère de dimension $2n-1$ et

$$D^{2n} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 \leq 1\}$$

comme modèle de la boule de dimension $2n$.

Utiliser l'application quotient $p : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ de l'exercice 3 pour construire un carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} S^{2n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d] & \mathbb{C}P^{n-1} \arrow[d, dotted] \\ D^{2n} \arrow[r, dotted] & \mathbb{C}P^n \end{tikzcd}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.