Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Master Mathématiques Recherche, Semestre 3 (2014-15)
Homologue et Topologie
Problèmes, Feuille 3

§1. Complexes et suites exactes

1. Problème : homologie et suites exactes
1.1) Des morphismes de complexes de chaînes forment une suite exacte

$$0 \longrightarrow (C'_*, \delta') \xrightarrow{i} (C_*, \delta) \xrightarrow{p} (C''_*, \delta'') \longrightarrow 0$$

si ces morphismes définissent une suite exacte de $\mathbb{K}$-modules en tout degré $n \geq 0$. Montrer que les modules d'homologie associés à de tels complexes s'insèrent dans une suite exacte longue de la forme

$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_{d+1}(C''_*, \delta'') \xrightarrow{\partial_*} H_d(C'_*, \delta') \xrightarrow{i_*} H_d(C_*, \delta) \xrightarrow{p_*} H_d(C''_*, \delta'') \xrightarrow{\partial_*} H_{d-1}(C'_*, \delta') \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{p_*} H_1(C''_*, \delta'') \xrightarrow{\partial_*} H_0(C'_*, \delta') \xrightarrow{i_*} H_0(C_*, \delta) \xrightarrow{p_*} H_0(C''_*, \delta'') \longrightarrow 0.$$

L'application $\partial_* : H_*(C''_*, \delta'') \to H_{*-1}(C'_*, \delta')$ est le connectant de la suite exacte longue et s'obtient par une chasse aux éléments dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "\delta'"] & {} \arrow[d, "\delta"] & {} \arrow[d, "\delta''"] & \\
0 \arrow[r] & C'_{n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta'"] & C_{n+1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\delta"] & C''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta'"] & C_{n} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\delta"] & C''_{n} \arrow[r] \arrow[d, "\delta''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'_{n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta'"] & C_{n-1} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\delta"] & C''_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\delta''"] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

.

1.2) On considère un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (C'_*, \delta') \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"] & (C_*, \delta) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"] & (C''_*, \delta'') \arrow[r] \arrow[d, "f''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (D'_*, \delta') \arrow[r, "j"] & (D_*, \delta) \arrow[r, "q"] & (D''_*, \delta'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec des lignes exactes. Vérifier que la construction de la question 1 est naturelle dans le sens que les suites exactes longue d'homologie déduites des lignes de ce diagramme de complexes s'assemblent

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

en un diagramme commutatif à deux lignes reliées par les morphismes verticaux induits par f', f, et f'' en homologie. On suppose que deux morphismes parmi f', f, et f'' induisent des isomorphismes en homologie. Prouver que c'est aussi le cas du troisième.

2. Problème : caractéristique d'Euler d'un complexe
2.1) Soit (C_*, δ) un complexe de chaînes défini sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que chaque module C_n est de dimension finie et que l'on a $C_n = 0$ pour $n \gg 0$. Prouver la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dim C_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dim H_n(C_*, \delta).$$

Ce nombre $\chi(C_*, \delta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dim C_n$ s'appelle la caractéristique d'Euler du complexe (C_*, δ).
Indication : on utilisera les suites exactes courtes $0 \to B_n(C_*, \delta) \to Z_n(C_*, \delta) \to H_n(C_*, \delta) \to 0$, $0 \to Z_n(C_*, \delta) \to C_n \to B_{n-1}(C_*, \delta) \to 0$, et les propriétés d'additivité de la dimension.
2.2) Prouver que les caractéristiques d'Euler de complexes de chaînes s'insérant dans une suite exacte courte au sens de l'exercice précédent sont liés par la formule d'additivité $\chi(C_*, \delta) = \chi(C'_*, \delta) + \chi(C''_*, \delta)$.

§2. Homotopies de chaînes

3. Quiz : homotopies de chaînes
3.1) On dit que des morphismes de complexes de chaînes

$$f, g : (C_*, \delta) \to (D_*, \delta)$$

sont homotopes lorsqu'il existe des applications $h : C_n \to C_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, telles que $g - f = h\delta + \delta h$ en tout degré $n \geq 0$ (avec la convention $C_{-1} = D_{-1} = 0$ lorsque $n = 0$). Prouver des morphismes de complexes de chaînes homotopes induisent des morphismes égaux en homologie :

$$f_* = g_* : H_n(C_*, \delta) \to H(D_*, \delta)$$

en tout degré $n \geq 0$.
3.2) On dit qu'un complexe de chaînes (C_*, δ) est muni d'une homotopie contractante si on a des applications $s : C_n \to C_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, telles que $id = s\delta + \delta s$ en tout degré $n \geq 0$ (en prenant toujours la convention $C_{-1} = 0$ pour $n = 0$). Que peut-on dire de $H_*(C_*, \delta)$ lorsque l'on est dans cette situation?
3.3) On suppose maintenant que l'on a un complexe de chaînes (C_*, δ) muni d'une application $\epsilon : C_0 \to M$ telle que $\epsilon\delta = 0$ pour un certain module M et que l'on a des applications $\eta : M \to C_0$ et $s : C_n \to C_{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$, telles que $\epsilon\eta = id$ sur M, ainsi que $id - \eta\epsilon = \delta s$ sur C_0, et $id = s\delta + \delta s$ en degré $n \geq 1$. Que peut-on dire de $H_*(C_*, \delta)$ dans ce cas?

4. Problème : complexes de Koszul et de de Rham
On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle. Soit $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$. On considère le $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$-module K_n engendré par des éléments notés symboliquement $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$, pour $1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq m$, et avec les relations

$$\begin{aligned} & dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = -dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge dx_{i_k} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}, \\ \text{et} \quad & dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{i_k} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} = 0. \end{aligned}$$

On notera que les éléments $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$, tels que $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq m$, forment une base de K_n. On a ainsi

$$K_n = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m] dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}.$$

4.1) Soit $\kappa : K_n \to K_{n-1}$ l'application $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$-linéaire telle que

$$\kappa_*(dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_{i_k} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}.$$

La notation $\widehat{dx_{i_k}}$ signifie que l'on omet le facteur dx_{i_k} du produit $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$. Vérifier que (K_*, κ) forme un complexe de chaînes. C'est le *complexe de Koszul*.

4.2) Soit $\delta : K_n \to K_{n+1}$ l'application $\mathbb{K}$-linéaire telle que

$$\delta(P(x_1, \ldots, x_m) \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial P}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \cdot dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}.$$

Vérifier que (K_*, δ) forme un complexe de *cochaînes* (cette application augmente le degré). C'est le *complexe de de Rham* (algébrique) de $\mathbb{K}^n$.

4.3) On note $K_n^{(r)}$ le sous-$\mathbb{K}$-module de K_n engendré par les monômes $x_1^{r_1} \cdots x_m^{r_m} \cdot dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}$ tels que $r_1 + \cdots + r_m + n = r$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Observer que les modules $K_n^{(r)}$, $n \in \mathbb{N}$, pour r fixé, sont préservés par la différentielle du complexe de Koszul, et forme donc un sous-complexe de ce complexe, de sorte que l'on a une décomposition du complexe de Koszul en somme de sous-complexes de la forme :

$$(K_*, \kappa) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} (K_*^{(r)}, \kappa).$$

Prouver un résultat analogue pour le complexe de de Rham :

$$(K_*, \delta) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} (K_*^{(r)}, \delta).$$

4.4) Montrer que l'on a la relation $\delta\kappa + \kappa\delta = r\, id$ sur $K_n^{(r)} \subset K_n$ pour tout degré $n \geq 0$ (c'est la *relation d'Euler*). Que peut-on conclure de cette relation quant à $H_*(K_*^{(r)}, \kappa)$ et $H_*(K_*^{(r)}, \kappa)$, puis quant à $H_*(K_*, \kappa)$ et $H_*(K_*, \kappa)$?

RÉFÉRENCE : N. Jacobson, *Basic algebra II*, seconde édition, W. H. Freeman and Company, 1980. Section 6.13.