Université Lille 1 - Sciences et Technologies
Master Mathématiques Recherche, Semestre 3 (2014-15)
Homologue et Topologie
Problèmes, Feuille 4

§1. Homologie des sphères et des bouquets

1. Problème : Exercices élémentaires sur le degré

Le degré d'une application continue $f : S^n \to S^n$ est le nombre $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ tel que l'on a la relation $f_*(c) = \deg(f) \cdot c$ au niveau du module d'homologie $H_n(S^n, \mathbb{Z})$, pour toute classe $c \in H_n(S^n, \mathbb{Z})$.

On utilise $S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ comme modèle de la sphère.

1.1) Prouver que l'application $\sigma : (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ est de degré $\deg \sigma = -1$, soit en revenant au calcul de $H_*(S^n)$ par la suite exacte de Mayer-Vietoris (et en utilisant la fonctorialité de la suite exacte), soit en utilisant une description de la classe fondamentale de S^n.

1.2) Prouver que l'application d'antipodie $-id : v \mapsto -v$ est de degré $\deg(-id) = (-1)^{n+1}$.

1.3) Prouver que l'application $\rho_m : S^n \to S^n$, $m \in \mathbb{Z}$, telle que $\rho_m(r\cos(\theta), r\sin(\theta), x_2 \dots, x_n) = (r\cos(m\theta), r\sin(m\theta), x_2 \dots, x_n)$, où on note $r = \sqrt{1 - (x_2^2 + \dots + x_n^2)}$, est de degré $\deg \rho_m = m$. (Pour $m = -1$, on retrouve le résultat de la question 1.) *Indication*: On utilisera la suite exacte de Mayer-Vietoris et un argument de récurrence pour se ramener au cas $n = 1$.

2. Problème : Homologie de bouquets

Le bouquet de deux espaces X et Y munis d'un point base $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$ est le sous espace $X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$ avec $(x_0, y_0) \in X \vee Y$ comme point base. On a aussi une identification $X \vee Y = (X \amalg Y)/x_0 \equiv y_0$, pour tout couple d'espaces pointés X et Y, où on considère le quotient de la somme disjointe $X \amalg Y$ par la relation $x_0 \equiv y_0$ qui identifie le point base de X avec le point base de Y.

On a des applications naturelles

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift right, "i"'] & X \vee Y \arrow[l, shift right, "p"'] \arrow[r, shift left, "q"] & Y \arrow[l, shift left, "j"] \end{tikzcd}$$

telle que $pi = id_X$ et $qj = id_Y$. De plus, pour tout couple d'applications $f : X \to Z$ et $g : Y \to Z$ satisfaisant $f(x_0) = g(y_0)$, on a une unique application $f + g : X \vee Y \to Z$ telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \vee Y \arrow[d, dotted, "\exists f+g"] & Y \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

commute.

2.1) On suppose que le point x_0 possède un voisinage contractile dans X, de même que le point y_0 dans Y. Prouver, en appliquant la suite de Mayer-Vietoris de façon appropriée, que l'on a un isomorphisme $\tilde{H}_n(X \vee Y) = \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y)$ au niveau de l'homologie réduite, pour tout degré $n \geq 0$. On montrera aussi comment déterminer au moyen des applications (i, j) et de (p, q) l'image d'une classe $c \in \tilde{H}_n(X \vee Y)$ dans $\tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y)$ par cet isomorphisme et vice versa.

2.2) On considère maintenant le cas $X = Y = S^n$. On travaille avec un modèle cubique $S^n = I^n/\partial I^n$ de la sphère de dimension n, où on note $I = [0, 1]$. On a alors $S^n = I_+^n/\partial I_+^n = I_-^n/\partial I_-^n$

BF, Courriel: `Benoit.Fresse@math.univ-lille1.fr`

où $I^n_+ = \{(t_1,\dots,t_n)\in[1/2,1]\times I^{n-1}\}$, et $I^n_- = \{(t_1,\dots,t_n)\in[0,1/2]\times I^{n-1}\}$, ce qui permet d'obtenir une expression:

$$S^n\vee S^n = (I^n_-/\partial I^n_-)\vee(I^n_+/\partial I^n_+) = \underbrace{(I^n_-\cup I^n_+)}_{=I^n}/(\partial I^n_-\cup\partial I^n_+)$$

(faire un dessin). On a aussi une application $p : S^n\to S^n\vee S^n$ induite par l'identité $I^n = I^n_-\cup I^n_+$.

Donner l'expression du morphisme induit par cette application p en homologie réduite, ainsi que le degré du morphisme défini par l'application composée $rp : S^n\to S^n$ où $r = id+id : S^n\vee S^n\to S^n$.

2.3) Généraliser les résultats de la question précédente aux bouquets de m copies de S^n. Retrouver le résultat de la question 3 du problème 1.

§2. Homologie d'espaces classiques

3. Problème : Homologie des espaces projectifs réels

3.1) Déterminer le complexe cellulaire des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$ en utilisant la décomposition en somme amalgamée $\mathbb{R}P^n = D^n\cup_p\mathbb{R}P^{n-1}$ du problème 9 de la feuille 2 pour définir la structure de CW-complexe de $\mathbb{R}P^n$.

3.2) Déterminer l'homologie des espaces projectifs réels $\mathbb{R}P^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ en utilisant le résultat de la question précédente.

4. Problème : Homologie des espaces projectifs complexes

Déterminer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des espaces projectifs complexes $\mathbb{C}P^n$ en adaptant les arguments du problème précédent.

§3. Premières applications

5. Problème : Théorème de Brouwer

On utilise le modèle euclidien de la sphère de dimension $n-1$, soit $S^{n-1} = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}|x_1^2+\dots+x_n^2=1\}$, et le modèle euclidien du disque de dimension n, soit $D^n = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}|x_1^2+\dots+x_n^2\leq 1\}$.

5.1) Soit $A\subset X$ un sous-espace d'un espace X. On dit que A forme un rétract de X si l'application d'inclusion $i : A\hookrightarrow X$ possède un inverse à gauche $r : X\to A$, satisfaisant $ri = id_A$. Montrer que la sphère S^{n-1} n'est pas rétract de D^n, pour toute valeur de $n\geq 1$. *Indication*: On utilisera la fonctorialité de l'homologie pour montrer que l'existence d'une application $r : D^n\to S^{n-1}$ telle que $ri = id$ conduit à une absurdité.

5.2) Utiliser le résultat de la question précédente pour montrer que toute application $f : D^n\to D^n$ possède un point fixe. *Indication*: Si ce n'est pas le cas, et $v\neq f(v)$ pour tout $v\in D^n$, alors on peut considérer l'application $r : D^n\to S^{n-1}$ telle que $r(v) = \{f(v)+t(v-f(v))|t>0\}\cap S^{n-1}$.

6. Problème : Théorème d'invariance du domaine

6.1) Soit U un ouvert (non-vide) de $\mathbb{R}^m$. On fixe $x\in U$. Calculer $H_*(U,U\setminus\{x\};\mathbb{Z})$. *Indication*: on utilisera l'axiome d'excision de façon appropriée.

6.2) Utiliser le résultat obtenu dans la question précédente pour montrer le théorème d'invariance du domaine : des ouverts (non-vides) U de $\mathbb{R}^m$ et V de $\mathbb{R}^n$ ne peuvent être homéomorphes lorsque $m\neq n$.