

## Feuille 5

## 1. La classification des polyèdres réguliers

Un *polyèdre régulier* est une surface  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  formée de  $N$  polygones réguliers identiques (i.e., isométriquement équivalents) s'inscrivant dans une sphère, disons  $S^2$ . On obtient  $P$  en recollant les polygones de sorte que chaque sommet est à l'extrémité d'un même nombre d'arêtes, et que chaque arête est le côté d'exactly deux des polygones. Il est bien connu depuis l'antiquité classique que (à une isométrie près) les seuls polyèdres réguliers possibles sont les cinq suivants :

- Le tétraèdre (composé de 4 triangles réguliers)
- Le cube (6 carrés)
- L'octaèdre (8 triangles)
- Le dodécaèdre (12 pentagones)
- L'icosaèdre (20 triangles)

Le but de ce problème est de prouver cette classification en appliquant des résultats du cours de topologie algébrique. On se donne un polyèdre régulier  $P$  composé de  $N$  copies d'un  $n$ -gone régulier. On note également  $m$  le nombre d'arêtes incidentes à chacun des sommets de  $P$ . Le polyèdre  $P$  est entièrement déterminé par le triplet  $(n, m, N) \in \mathbb{N}^3$ .

a) (**Caractéristique d'Euler.**) Démontrer la relation suivante :

$$2 = v - e + f,$$

où  $v$  ("vertices"),  $e$  ("edges") et  $f$  ("faces") indiquent respectivement le nombre de sommets, arêtes et faces de  $P$ . (*Indication* : utiliser le fait que  $P$  définit une structure de CW-complexe sur la sphère  $S^2 \cong P$ , et la détermination de la caractéristique d'Euler-Poincaré sur la sphère. Voir Feuille 3, Exercice 2.1.)

b) ("**Hand-shaking lemma.**") Démontrer les deux égalités suivantes :

$$mv = 2e = Nn.$$

Il s'ensuit que le triplet  $(n, m, N)$ , et donc  $P$  aussi, est complètement déterminé par  $(v, e, f)$  ; expliciter la relation entre les deux triplets. Remarquer de plus que, par (a), chaque triplet est connu dès qu'on a déterminé deux des trois nombres.

d) Dédire de (a) et (b) l'équation suivante :

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

e) Dédire de (d) (et des contraintes évidentes  $e, n, m \geq 3$ ), par une analyse de tout les cas possible  $n = 3, 4, \dots$  et  $m = 3, 4, \dots$  que  $P$  doit coïncider avec l'un des

cinq polyèdres réguliers classiques mentionnés ci-dessus. On peut s'aider de la table suivante que l'on complètera au fur et à mesure des arguments :

	$n$	$m$	$N$	$v$	$e$	$f$
tetraèdre	3	3	4	4	6	4
cube			6			6
octaèdre			8			8
dodécaèdre			12			12
icosaèdre			20			20

Cela conclut la démonstration du théorème de classification. Une extra :

- f) (**La dualité de Poincaré pour les polyèdres.**) Montrer géométriquement que pour chaque polyèdre  $P$ , donné par  $(n, m, N)$  ou également par  $(v, e, f)$ , il existe un *polyèdre dual*  $P'$  associé au triplet  $(n', m', N') := (m, n, v)$ . Remarquer que  $(P')' = P$ , et indiquer lesquels des polyèdres de la classification sont en relation de dualité entre eux. Grâce à la dualité, même ceux qui ne savent pas dessiner un dodécaèdre ou un icosaèdre pourront aisément compléter la table du (e). (*Indication*: placer un sommet au centre de chaque face de  $P$ ...)

## 2. Équivalences homotopiques vs. quasi-isomorphismes

Soit  $f_* = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}} : C_* \rightarrow D_*$  un morphisme de complexes de chaînes sur l'anneau  $\mathbb{K}$ . On rappelle que  $f$  est un *quasi-isomorphisme* s'il induit un isomorphisme  $H_i(C_*) \xrightarrow{\cong} H_i(D_*)$  en chaque module d'homologie, que  $f$  est une *équivalence d'homotopie* s'il admet un inverse à homotopie près, c'est à dire, s'ils existent un morphisme  $g_* : D_* \rightarrow C_*$  et des homotopies de chaînes  $s_* : f_* g_* \simeq \text{id}_{D_*}$  et  $t_* : g_* f_* \simeq \text{id}_{C_*}$ .

On a démontré pendant le cours que chaque équivalence d'homotopie est aussi un quasi-isomorphisme. La réciproque de cette assertion est fautive en général, comme le montre l'exemple suivant.

On travaille avec  $\mathbb{K} := \mathbb{Z}$ . On fixe  $n \in \mathbb{Z}$ . Soit  $C_*$  le complexe  $\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  avec les deux copies de  $\mathbb{Z}$  en degrés 1 et 0. Soit  $D_*$  le complexe formé de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  placé en degré 0 ; et soit  $f_*$  le morphisme quotient  $f_0 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  en degré 0 et (forcément)  $f_n = 0$  en degré  $n \neq 0$ . Vérifier les trois affirmations suivantes :

$f_*$  est un quasi-isomorphisme si et seulement si  $n \neq 0$ .

Si de plus  $n = \pm 1$ , alors  $f_*$  est aussi une équivalence d'homotopie.

Si par contre  $n \neq \pm 1$ , alors  $f_*$  n'est *pas* une équivalence d'homotopie !

## 3. Une application du cup-produit

On veut démontrer le théorème suivant (voir : [Bredon, Thm. 4.9, p. 332]).

**Théorème:** Soit  $X$  un espace qui peut s'écrire comme un réunion de deux ouvert contractiles  $U, V$ . Alors, si  $\alpha \in H^p(X)$  et  $\beta \in H^q(X)$  sont deux classes de cohomologie ayant un degré strictement positif ( $p, q > 0$ ), leur cup-produit  $\alpha \smile \beta$  s'annule dans  $H^{p+q}(X)$  (pour des coefficients  $\mathbb{K}$  quelconques).

Par exemple, pendant le cours on a calculé les deux algèbres de cohomologie suivantes :

$$H^\bullet(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \frac{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha_1]}{(\alpha_1^3)} \quad H^\bullet(T^2, \mathbb{K}) \cong \frac{\mathbb{K}[\alpha_1, \beta_1]}{(\alpha_1 \beta_1 + \beta_1 \alpha_1, \alpha_1^2, \beta_1^2)}$$

(Ici l'indice d'un générateur indique son degré.) À cause des produits nontriviaux  $\alpha_1 \smile \alpha_1$  resp.  $\alpha_1 \smile \beta_1$ , on en déduit que ni le plan projectif  $\mathbb{R}P^2$  ni le tore  $T^2$  ne se laisse recouvrir par deux ouverts contractiles.

On démontre ce théorème par les étapes suivantes.

- a) Soient  $A, B \subset X$  deux sous-espaces quelconques. Vérifier que le cup-produit "absolu" se restreint à une application  $\smile : S^p(X, A) \times S^q(X, B) \rightarrow S^{p+q}(X, A \cup B)$ , qui à son tour induit une application  $\smile : H^p(X, A) \times H^q(X, B) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B)$  bien définie (associative et unitaire).

(Indication: pour cela on identifie  $S^p(X, A)$  avec le sous-module de  $S^p(X)$  des cochaines  $u : S_p(X) \rightarrow \mathbb{K}$  telles que  $u(c) = 0$  pour tout  $c \in S^p(A)$  ; et on procède de même avec  $B$ .)

- b) Vérifier que le carré suivant est commutatif (les flèches horizontales sont induites par l'inclusion  $X \hookrightarrow (X, A)$ , via  $S^*(X, A) \hookrightarrow S^*(X)$  comme dans (a), etc.) :

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A) \times H^q(X, B) & \longrightarrow & H^p(X) \times H^q(X) \\ \smile \downarrow & & \downarrow \smile \\ H^{p+q}(X, A \cup B) & \longrightarrow & H^{p+q}(X) \end{array}$$

- c) Si  $\alpha \in H^p(X)$  avec  $p > 0$  et  $U$  est contractile, déduire de la suite exacte longue de cohomologie pour la paire  $(X, U)$  que  $\alpha = \partial(\bar{\alpha})$  pour un  $\bar{\alpha} \in H^p(X, U)$ . De façon analogue, trouver un  $\bar{\beta} \in H^q(X, V)$  tel que  $\partial(\bar{\beta}) = \beta$ .
- d) Si de plus  $X = U \cup V$ , déduire de (a), (b) et (c) que  $\alpha \smile \beta = 0$ , ce qui démontre le théorème.

#### 4. Un calcul d'homologie cellulaire en dimension trois

Soit  $X$  l'espace – en faite, une variété de dimension trois – obtenu d'un cube en identifiant chaque face avec sa face opposée, de façon parallèle. Plus concrètement :  $X = [0, 1]^3 / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence engendrée par  $(r, s, 0) \sim (r, s, 1)$ ,  $(r, 0, t) \sim (r, 1, t)$  et  $(0, s, t) \sim (1, s, t)$  pour tous  $r, s, t \in \mathbb{R}$ . On a aussi  $X \cong \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3 \cong S^1 \times S^1 \times S^1$ .

Exploiter la CW-structure "évidente" de  $X$  (celle induite par la structure polyédrale du cube : une 3-cellule "à l'intérieur", trois (!) 2-cellules "faces", ...) pour en calculer l'homologie  $H_*(X, \mathbb{K})$ . (Indication: faire un joli dessin pour étudier le quotient  $[0, 1]^3 / \sim$ . Calculer le complexe cellulaire associé à cette CW-structure en suivant la méthode employée dans le cours pour les surfaces. Pour calculer la différentielle  $\delta_3^{cell}$ , factoriser l'application de rattachement  $\partial[0, 1]^3 = S^2 \xrightarrow{h} X_2 \rightarrow X_2/X_1 = S^2 \vee S^2 \vee S^2$  comme  $S^2 \rightarrow \bigvee_{6 \text{ faces}} S^2 \rightarrow S^2 \vee S^2 \vee S^2$ , et remarquer que la première application est homotope au *pincement* de  $S^2$  en un bouquet de six copies de  $S^2$ . Voir Feuille 4, Ex. 2.2-3.)

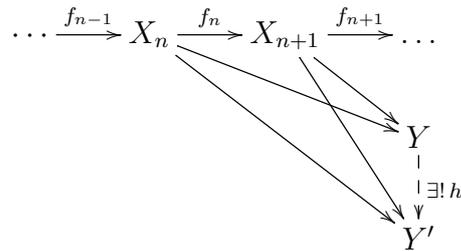
#### 5. Les limites inductives (colimites)

**Définition :** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie. Soit  $(X_n, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'objets et de morphismes dans  $\mathcal{C}$  :

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

Une *limite inductive* ou *colimite* du diagramme  $(X_n, f_n)_n$  est par définition un objet  $Y$  de  $\mathcal{C}$  muni de morphismes  $g_n : X_n \rightarrow Y$  satisfaisant la propriété universelle suivante (i)+(ii):

- (i) On a  $g_{n+1} \circ f_n = g_n$  pour tout  $n$ .
- (ii) Si  $Y'$  est un autre objet muni de morphismes  $\{g_n' : X_n \rightarrow Y'\}_n$  et satisfaisant (i), alors il existe un et un seul morphisme  $h : Y \rightarrow Y'$  tel que  $h \circ g_n = g_n'$  pour tout  $n$ .



- a) Dédurre de la définition que, si une colimite existe, elle est unique à un isomorphisme unique près. Plus précisément : si  $(Y, g_n)$  et  $(Y', g_n')$  sont deux colimites du même diagramme  $(X_n, f_n)$ , alors il existe un seul isomorphisme  $h : Y \xrightarrow{\sim} Y'$  tel que  $h g_n = g_n'$  pour tout  $n$ . On pourra donc légitimement noter  $\text{colim}_n (X_n, f_n)$ , ou plus simplement  $\text{colim}_n X_n$ , cet objet  $Y$  bien déterminé. La plupart du temps on supprimera des notations les morphismes canoniques  $g_n$  (qui font néanmoins partie de la colimite!).
- b) **(Ensembles.)** Dans  $\mathcal{C} = \mathbf{Ens}$ , la catégorie des ensembles, la colimite d'une suite  $(X_n, f_n)$  existe toujours et se construit comme suit :  $\text{colim}_n X_n = \coprod_n X_n / \sim$ , où  $\coprod_n X_n$  dénote le coproduit (réunion disjointe) des  $X_n$  et  $\sim$  dénote la relation d'équivalence engendrée par  $x \sim f_n(x)$  pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in X_n$ . Vérifier la propriété universelle !
- c) **(Modules.)** Adapter la construction de (b) pour la catégorie  $\mathcal{C} = \mathbf{Mod}(K)$  des  $\mathbb{K}$ -modules, en utilisant la somme directe quotientée par un sous-module convenable.
- d) **(Fonctorialité de la colimite.)** Soit  $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$  la catégorie dont les objets sont toutes les séquences  $(X_n, f_n)$  dans  $\mathcal{C}$ , et où les morphismes  $\varphi = (\varphi_n) : (X_n, f_n) \rightarrow (Y_n, g_n)$  sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{f_0} & X_1 & \xrightarrow{f_1} & \dots & \xrightarrow{f_{n-1}} & X_n & \xrightarrow{f_n} & X_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & \dots \\
 \downarrow \varphi_0 & & \downarrow \varphi_1 & & & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \\
 Y_0 & \xrightarrow{g_0} & Y_1 & \xrightarrow{g_1} & \dots & \xrightarrow{g_{n-1}} & Y_n & \xrightarrow{g_n} & Y_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & \dots
 \end{array}$$

qu'on compose de façon évidente, composante par composante (comme pour les morphismes de complexes). Dédurre de la propriété universelle que, pourvu que chaque séquence de  $\mathcal{C}$  admette une colimite, l'opération "colimite" s'étend sur les morphismes de séquences en définissant ainsi un foncteur  $\text{colim} : \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{C}$ .

- e) **(Complexes.)** Montrer que, tout comme pour les sommes directes, les noyaux, les images, etc., on obtient la colimite d'une suite dans  $\mathcal{C} = \mathbf{Ch}(\mathbb{K})$ , la catégorie des complexes de chaînes sur  $\mathbb{K}$ , simplement en appliquant degré par degré la construction correspondante pour les modules : donc si  $(C_*^0, \delta_*^0) \xrightarrow{f_*^0} (C_*^1, \delta_*^1) \xrightarrow{f_*^1} \dots$  est une séquence de complexes, (où maintenant l'indice de la séquence est écrit en haut pour ne pas le confondre avec le degré des complexes), sa colimite est le complexe  $(C_*, \delta_*)$  dont la composante de degré  $d$  est le  $\mathbb{K}$ -module  $C_d = \text{colim}_n C_d^n$ , et dont la différentielle  $\delta_d : C_d \rightarrow C_{d-1}$  est le morphisme  $\delta_d = \text{colim}_n \delta_d^n$  obtenu par la fonctorialité de la colimite, dans le sens de la partie (d). Démontrer de plus qu'on a ( $\forall i \in \mathbb{Z}$ ) :

$$H_i(C_*, \delta_*) \cong \text{colim}_n H_i(C_*^n, \delta_*^n).$$

- f) (Espaces topologiques.)** La limite inductive d'une séquence  $(X_n, f_n)$  d'espaces est, en tant qu'ensemble, la colimite des ensembles sous-jacents aux  $X_n$ , qu'on munit ensuite de la *topologie faible* suivante : une partie  $U \subset \text{colim}_n X_n$  est ouverte (resp. fermée) ssi  $(\iota_n)^{-1}U$  est ouverte (resp. fermée) dans  $X_n$  pour tout  $n$ . Ici  $\iota_n : X_n \rightarrow \text{colim}_i X_i$  dénote l'application canonique dont est munie la colimite par construction.
- g)** Soit  $X$  un espace topologique muni d'une chaîne d'ouverts  $U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \dots$  telle que  $X = \bigcup_{n \geq 0} U_n$ . Montrer que  $X = \text{colim}(U_0 \hookrightarrow U_1 \hookrightarrow U_2 \dots)$  (i.e., que la topologie de  $X$  est la topologie faible de la séquence, cf. (f)). Dédurre, de (e) et du fait que chaque simplex standard  $\Delta^n$  est compact, que  $S_*(X) \cong \text{colim}_n S_*(U_n)$  en tant que complexes et que donc

$$H_*(X) \cong \text{colim}_n H_*(U_n).$$

- h) (CW-complexes infinis.)** Une *CW-structure* (de dimension non nécessairement finie) sur un espace topologique  $X$  peut se définir comme la donnée d'une séquence de sous-espaces  $X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow \dots$  telles que (i)  $X_0$  est un ensemble discret de points, (ii) chaque inclusion  $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  fait partie d'une somme amalgamée (= carré cocartésien, pushout)

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\alpha} S^n & \longrightarrow & \coprod_{\alpha} D^{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & X_{n+1} \end{array}$$

et (iii) la topologie de  $X$  est la faible :  $X = \text{colim}_n X_n$  [d'où le "W" dans "CW", de "weak topology"]. Montrer que chaque cellule fermée de  $X$  (i.e., l'image d'un des  $D^n$ ) rencontre un nombre fini seulement des squelettes  $X_m$ , et conclure par un argument similaire à celui de (g) mais appliqué au complexe cellulaire de  $X$ , que

$$H_*(X) \cong \text{colim}_n H_*(X_n).$$

Cela s'applique par exemple à la sphère infinie  $S^\infty$  et aux espaces projectifs infinis  $\mathbb{R}P^\infty := \text{colim}_n \mathbb{R}P^n$  et  $\mathbb{C}P^\infty := \text{colim}_n \mathbb{C}P^n$ , où les inclusions  $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  sont à chaque fois "l'inclusion à l'équateur" déjà utilisée pour les versions finies.

**Remarque :** La définition de limite directe se généralise pour des diagrammes plus généraux, indicés par un ensemble ordonné filtrant.

Un ensemble partiellement ordonné (= poset)  $(P, \leq)$  est dit *filtrant* si pour tous  $i, j \in P$  il existe un  $k \in P$  tel que  $i, j \leq k$ . Un *diagramme (ou système) filtrant* dans la catégorie  $\mathcal{C}$  consiste d'objets  $X_i$  ( $i \in P$ ) et de morphismes  $f_{j,i} : X_i \rightarrow X_j$  ( $i \leq j$ ) tels que  $f_{k,j} \circ f_{j,i} = f_{k,i}$  si  $i \leq j \leq k$ .

Par exemple, les diagrammes séquentiels traités ci-dessus représentent le cas spécial  $P = \mathbb{N}$ , muni de son ordre naturel. (Car chaque séquence  $(X_n, f_n)$  se "complète" en un diagramme filtrant pour  $(\mathbb{N}, \leq)$  en posant  $f_{m,n} := f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \dots \circ f_n$  si  $n \leq m$ .) On voit facilement que toutes les affirmations (a)-(g) restent vrai pour les limites inductives de diagrammes filtrants, indicés par un quelconque ensemble filtrant  $(P, \leq)$  fixé (en prenant soin d'adapter les constructions des points (b) et (c)). Par exemple, on peut appliquer la conclusion de (g) au diagramme filtrant de **Top** constitué de *tout* les sous-ensembles ouvert  $U \subset X$ .

\*\*\*