La correspondance de Green dans les mathématiques équivariantes

Ivo Dell'Ambrogio
Université de Lille

Séminaire
Laboratoire de mathématiques de Reims
6 avril 2021

References:

- Paul Balmer and Ivo Dell'Ambrogio. *Green equivalences in equivariant mathematics*. Math. Ann. (2021) (arXiv:2001.10646).
- Paul Balmer and Ivo Dell'Ambrogio. *Mackey 2-functors and Mackey 2-motives*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society, Zürich (2020), viii+227. (arXiv:1808.04902).

1. La correspondance de Green classique

Un résultat fondamental en théorie des représentations modulaires :

- k : un corps de caractéristique $p > 0$
- G : un groupe fini
- Pour M un kG-module indécomposable, le **vertex** de M est : le plus petit sous-groupe $Q \leq G$ tel que $M \leq \mathrm{Ind}_Q^G(N)$ pour un kQ-module N $\quad$ ($\rightsquigarrow$ Q est un p-groupe, unique à conjugaison près).

La correspondance de Green (J. A. Green 1958, 1964)

Pour tous $Q \leq H \leq G$ tels que $N_G(Q) \subseteq H$, on a une bijection

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c} kH\text{-modules indéc.} \\ \text{de vertex } Q \end{array}} \arrow[r, shift left, "\text{``Ind''}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \boxed{\begin{array}{c} kG\text{-modules indéc.} \\ \text{de vertex } Q \end{array}} \arrow[l, shift left, "\text{``Res''}"]
\end{tikzcd}$$

où ${}_HN$ et ${}_GM$ se correspondent ssi $M \leq \mathrm{Ind}_H^G(N)$ ssi $N \leq \mathrm{Res}_H^G(M)$.

2. L'*équivalence* de Green classique

Notations:

- $\mathcal{M}(G) := kG\text{-mod}$, la catégorie des kG-modules de dimension finie.
- $\mathcal{M}(G;S) := \{M \mid M \leq \mathrm{Ind}(N) \text{ pour un } N \in \mathcal{M}(S)\} \overset{\text{pleine}}{\subset} \mathcal{M}(G)$ la sous-catégorie pleine des ***S*-objets**, pour $S \leq G$ un sous-groupe.
- $\mathcal{M}(G;\mathbb{S})$ de façon similaire pour un ensemble $\mathbb{S}$ de sous-groupes de G.

L'équivalence de Green (J. A. Green 1974)

$Q \leq H \leq G$ comme avant. On a une équivalence de "quotients additifs"

$$\begin{tikzcd} \frac{\mathcal{M}(H;Q)}{\mathcal{M}(H;\mathbb{X})} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Ind}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \frac{\mathcal{M}(G;Q)}{\mathcal{M}(G;\mathbb{X})} \arrow[l, shift left, "\text{“Res”}"] \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{X} = \mathbb{X}(G,H,Q) := \{Q \cap gQg^{-1} \mid g \in G \smallsetminus H\}$.

3. Explications

Rappel sur les **quotients additifs** :

- Si $\mathcal{A}$ est une catégorie additive, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une sous-catégorie pleine,
- $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ ou $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ est la catégorie avec les mêmes objets que $\mathcal{A}$ et Homs :

$$\mathcal{A}/\mathcal{B}\,(X,Y) = \frac{\mathcal{A}(X,Y)}{\left\{ \varphi\colon X \to Y \;\middle|\; \exists \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, dotted] & & Y \\ & Z \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} \text{ pour un } Z \in \mathcal{B} \right\}}$$

- Example: $kG\text{-}\underline{\mathrm{mod}} := kG\text{-}\mathrm{mod}/kG\text{-}\mathrm{proj}$, the catégorie stable de kG.
  Non abélienne, mais triangulée !
- On retrouve la cohomologie de Tate : $kG\text{-}\underline{\mathrm{mod}}^{*}(k,k) \simeq \hat{H}^{*}(G;k)$.
- Pour des raisons similaires, les "catégories stables relatives" dans l'équivalence de Green sont triangulalées.

4. Équiv de Green + Krull-Schmidt ⇒ Corr de Green

- kG-mod est une **catégorie de Krull-Schmidt**, en particulier :

$\forall$ objet M, $\exists$ décomposition $M \simeq M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$, telle que les $M_1, \ldots, M_n$ sont indécomposables et uniques à une perm. près.

- La propriété KS est préservée par les sous-catégories et les quotients.
- L' équivalence de Green preserve les vertex
  ⇒ la *correspondance* découle de l'*équivalence* :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}(H) \arrow[rr, "\mathrm{Ind}"] & & \mathcal{M}(G) & \text{décomposer :} \\
N \arrow[d, maps to, "\text{vert}=Q"] & \mathcal{M}(H;Q) \arrow[u, hook] \arrow[rr, dotted] \arrow[d, two heads] & & \mathcal{M}(G;Q) \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Ind}(N) \geq M \arrow[d, maps to, "\exists! M \ \text{vert}=Q"] \\
N & \mathcal{M}(H;Q)/\mathcal{M}(H;\mathbb{X}) \arrow[rr, dotted, "\sim"] & & \mathcal{M}(G;Q)/\mathcal{M}(G;\mathbb{X}) & M
\end{tikzcd}$$

5. Généralisations

Remarques :

- L'*énoncé* le l'équivalence de Green fait sens dès qu'on dispose de :

$$\left.\begin{array}{l}\text{catégories additives } \mathcal{M}(S) \ \text{(pour } S \leq G) \\ \text{foncteurs additifs } \mathrm{Ind}, \mathrm{Res} \text{ entre elles}\end{array}\right\} \rightsquigarrow \mathcal{M}(G;Q) \text{ etc.}$$

- Dès que les $\mathcal{M}(S)$ sont de KS : éq. de Green ⇒ corr. de Green.
- Est-ce qu'on peut démontrer l'éq. de Green pour d'autres $\mathcal{M}(S) = ??$

Résultats précédents :

1. Benson-Wheeler 2001: $\mathcal{M}(G) = kG$-Mod, repr. de dim ∞.
2. Carlson-Wang-Zhang 2020: $\mathcal{M}(G) =$ la catégorie homotopique ou dérivée des complexes (bornés ou pas etc.) de kG-modules.

   Remarque : $\mathcal{M}(G) = D^b(kG\text{-mod})$ est de Krull-Schmidt

   ⇒ une corr. de Green pour les complexes indécomposables.

6. Le bon contexte

Notre contribution : la théorie des *2-foncteurs de Mackey*.

- Idée: les *démonstrations* n'utilisent que les catégories $\mathcal{M}(S)$ ($S \leq G$), les foncteurs adjoints Ind et Res, et la formule de Mackey !
- Plus précisément :

Definition (Balmer-Dell'Ambrogio 2020)

Un 2-foncteur de Mackey pour G est un 2-functeur de groupoïdes finis

$$\mathcal{M} \colon (\underbrace{gpd^f/G}_{\simeq\ G\text{-sets}})^{op} \to ADD$$

soumis aux axiomes :

1. **Additivité :** $\mathcal{M}(G_1 \sqcup G_2) \simeq \mathcal{M}(G_1) \times \mathcal{M}(G_2)$
2. **Induction :** pour $K \overset{i}{\hookrightarrow} L \leq G$ fidèle (e.g. l'inclusion d'un sous-groupe), le foncteur $\mathrm{Res}^L_K := \mathcal{M}(i) \colon \mathcal{M}(L) \to \mathcal{M}(K)$ a un adjoint des deux côtés, Ind^L_K.
3. **Formule de Mackey :** les adjonctions de gauche et droite satisfont la formule de Beck-Chevalley pour les pseudo-pullback dans gpd^f/G.

7. Le bon résultat

L'équivalence de Green générale (Balmer-D. 2021)

Soit $\mathcal{M}$ un 2-foncteur de Mackey pour G, et $Q \leq H \leq G$ quelconque. Alors le foncteur d'induction induit une équivalence de catégories

$$\left(\frac{\mathcal{M}(H;Q)}{\mathcal{M}(H;\mathbb{X})}\right)^{\natural} \xrightarrow[\sim]{\text{Ind}} \left(\frac{\mathcal{M}(G;Q)}{\mathcal{M}(G;\mathbb{X})}\right)^{\natural}$$

où $\mathbb{X} = \{Q \cap {}^{g}Q \mid g \in G \smallsetminus H\}$ et où $(-)^{\natural}$ est la complétion idempotente.

Remarques :

- Pas de conditions sur les coéfficients, ni sur $N_G(Q)$!
- Dans les exemples la complétion idempotente n'est pas nécessaire, pour différentes raisons (e.g. si les $\mathcal{M}(S)$ sont KS ou triangulées).
- Dans le cas Krull-Schmidt, on obtient la correspondence de Green.

8. Les 2-foncteurs de Mackey sont omniprésents !

Il existe un 2-foncteur de Mackey $\mathcal{M}$ pour G pour chacune des familles suivantes de catégories abélienne ou triangulées $\mathcal{M}(S)$ (pour $S \leq G$):

1. En **théorie des représentations** (linéaires) : $\mathcal{M}(S) = kS\text{-mod}$, $kS\text{-Mod}$, $D^b(kS\text{-mod})$, $D(kS\text{-Mod})$, $kS\text{-}\underline{\text{mod}}$ . . .
2. En **homotopie stable** : $\mathcal{M}(S) = Ho(\mathcal{S}p^S)$, la catégorie homotopique des S-spectres.
3. En **topologie noncommutative / algèbres d'opérateurs** : $\mathcal{M}(S) = KK^S$ or E^S, la théorie de Kasparov ou E-théorie de Higson-Connes équivariante.
4. En **géometrie** : Pour X un espace localement annelé (e.g. un schéme) avec G-action: $\mathcal{M}(S) = Sh(X /\!\!/ S)$ or $D(Sh(X /\!\!/ S))$, les faisceaux S-équivariants.

9. Exemple : application en géométrie algébrique

- X un schéma
- Supposons que G agit sur X (donc sur tout $S \leq G$)
- Soit $\mathcal{M}$ le 2-foncteur de Mackey tel que $\mathcal{M}(S) = \mathrm{Coh}(X /\!\!/ S)$, la catégorie des **faisceaux cohérents S-équivariants de $\mathcal{O}_X$-modules** : $M = \big(M, \{\gamma_g \colon M \overset{\sim}{\to} g^*(M)\}_{g \in S}\big)$ avec $\begin{cases} M \in \mathrm{Coh}(X) \\ \text{cond. de cocycle sur } \gamma_g. \end{cases}$
- Exemple : $X = \mathrm{Spec}(k)$ avec action triviale $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Coh}(X /\!\!/ S) = kS\text{-mod}$.
- On obtient l'équivalence de Green suivante

$$\frac{\mathrm{Coh}(X /\!\!/ H; Q)}{\mathrm{Coh}(X /\!\!/ H; \mathbb{X})} \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Ind}} \frac{\mathrm{Coh}(X /\!\!/ G; Q)}{\mathrm{Coh}(X /\!\!/ G; \mathbb{X})}$$

et aussi pour $\mathrm{Qcoh}(X /\!\!/ S)$, ou $D(\mathrm{Qcoh}(X /\!\!/ S))$, etc.

10. La correspondance de Green globale

Pour X assez joli, les catégories $\mathrm{Coh}(X /\!\!/ S)$, et donc aussi $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Coh}(X /\!\!/ S))$, sont de Krull-Schmidt $\rightsquigarrow$ on obtient la correspondance d'indécomposables :

Theorem (La correspondance de Green 'globale')

G groupe fini agissant sur une variété propre et régulière (e.g. projective et lisse) X, sur un corps k de characteristique $p > 0$ divisant l'ordre de G.

Alors pour tout p-sous-groupe $Q \leq G$ et tout $H \leq G$ contenant $N_G(Q)$:

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\mathcal{O}_X\text{-modules coh. } H\text{-equiv.}\\ \text{indec. et de vertex } Q\end{array}} \arrow[r, shift left=2, "\text{“Ind”}"] \arrow[r, phantom, "\sim"] & \boxed{\begin{array}{c}\mathcal{O}_X\text{-modules coh. } G\text{-equiv.}\\ \text{indec. et de vertex } Q\end{array}} \arrow[l, shift left=2, "\text{“Res”}"] \end{tikzcd}$$

- Le même résultat vaut pour les complexes dans $D^b(\mathrm{Coh}(X /\!\!/ S))$.
- Pour $X = \mathrm{Spec}(k)$ avec G-action triviale, on récupère tous les résultats déjà connus ☺

Merci de votre attention !