Les 2-foncteurs de Mackey

Ivo Dell'Ambrogio
28 mars 2023

Université de Lille
Faculté des Sciences et Technologies
Département de Mathématiques
Laboratoire Paul Painlevé

Séminaire d'algèbre et de géométrie
Caen, 28 mars 2023

Références :

1. Paul Balmer et Ivo Dell'Ambrogio. Mackey 2-functors and Mackey 2-motives. *EMS Monographs in Mathematics.* Zürich (2020)
2. Paul Balmer et Ivo Dell'Ambrogio. Green equivalences in equivariant mathematics. *Math. Ann.* (2021)
3. Jun Maillard. A categorification of the Cartan-Eilenberg formula. *Adv. Math.* (2022).
4. Ivo Dell'Ambrogio. Green 2-functors. *Trans. Amer. Math. Soc.* (2022)
5. Paul Balmer et Ivo Dell'Ambrogio. Cohomological Mackey 2-functors. *J. Inst. Math. Jussieu* (2022)

Qu'est-ce que la théorie des représentations ?

Au minimum : *groupes finis agissant sur des espaces vectoriels !*

Pour G un groupe fini et k un corps, on veut étudier la catégorie des kG-modules (à gauche, de type fini) et les applications kG-linéaires :

$$mod(kG)$$

Dichotomie classique :

- **Le cas semi-simple**, quand $\mathrm{char}(k) \nmid |G|$, e.g. $\mathrm{char}(k) = 0$:
  Théorème de Maschke : toute représentation est une somme directe de représentations simples, de façon unique.
  $\rightsquigarrow$ on se réduit à étudier l'anneau des charactères $R_k(G) = K_0(mod\, kG)$.

- **Le cas modulaire**, quand $\mathrm{char}(k) \mid |G|$:
  la catégorie abélienne $mod(kG)$ admet des extension non-triviales, il y a beaucoup de représentations indécomposables en général.
  $\rightsquigarrow$ il faut utiliser des outils catégorique et homologiques :
  la catégorie dérivée $D^b(mod\, kG)$, la category stable $\underline{mod}(kG)$.

Une couche supplémentaire d'information *2-catégorique*

Soit $\color{red}{\mathcal{M}(G)}$ la catégorie $mod(kG)$, $D^b(mod\, kG)$, ou $\underline{mod}(kG)$. Laissons varier G!

Les structures suivants sont utilisé constamment :

- Les foncteurs de **restriction**, **induction** et **conjugaison** ($H \leq G$):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(G) \arrow[d, shift left, "Res_H^G"] \\ \mathcal{M}(H) \arrow[u, bend left, "Ind_H^G"] \arrow[r, "Conj_g", "\sim"'] & \mathcal{M}({}^gH) \end{tikzcd}$$

- Les **adjonctions** $Ind \dashv Res \dashv Ind$
  (On a une *ambi*jonction car l'index est *fini* et les catégories sont *additives*!)
- **Isomorphismes naturels de conjugaison** entre certains foncteurs, e.g.

$$conj_g : Conj_g \circ Res_H^G \cong Res_{{}^gH}^G$$

- La **formule de Mackey** (for $K, L \leq G$):

$$Res_L^G \circ Ind_K^G \cong \bigoplus_{[g] \in L \backslash G / K} Ind_{L \cap {}^gK}^L \circ Conj_g \circ Res_{L^g \cap K}^K \,.$$

Axiomatization : les 2-foncteurs de Mackey

gpd_f : la 2-catégorie des groupoïdes finis, foncteurs fidèles, transf. naturelles
ADD : la 2-catégorie des catégories et foncteurs additifs, transf. naturelles

Definition [Balmer-D. 2020]

Un **2-foncteur de Mackey** (global) est un 2-functor

$$\mathcal{M} \colon gpd_f^{op} \longrightarrow ADD$$

satisfaisant les axiomes suivants :

1. Additivité : $\mathcal{M}(G_1 \sqcup G_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(G_1) \oplus \mathcal{M}(G_2)$ et $\mathcal{M}(\emptyset) \xrightarrow{\sim} 0$.
2. Pour tout $i \colon H \to G$ fidèle, la "restriction" $i^* := \mathcal{M}(i) \colon \mathcal{M}(G) \to \mathcal{M}(H)$ admet un adoint à gauche i_ℓ et un adjoint à droite i_r.
3. Les adjonction de gauche et droite satisfont le Changement de Base.
4. Il existe un isomorphisme de foncteurs $i_\ell \cong i_r$ pour tout $i \colon H \to G$.

Pour la variante "locale" pour un G fixé : remplacer gpd_f avec $gpd_f / G \simeq G\text{-}set$.

Commentaires sur les axiomes

Inspiré par :

- Les foncteur de Mackey ordinaires (en groupes abéliens) [Green, Dress 70s]
- Les dérivateurs additifs [Grothendieck 80s]
- Similaire et complémentaire aux $(\infty, 1)$-functors de Mackey de [Barwick '17]

Explications :

- **Additivité 1 :** les groupoïdes se décomposent en groupes $G \simeq \coprod_n G_n$
  $\rightsquigarrow$ la donnée du 2-foncteur $\mathcal{M}$ est déterminée par son effet sur la 2-sous-catégorie des groupes finis : les Res^G_H, $Cong_g$ ($Isos_\varphi$) et $cong_g$!
- **Induction 2 :** comme pour les dérivateurs, les foncteurs de co/induction i_ℓ and i_r ne font vraiment pas partie des données.
- **Ambidexterité 4 :** l'existence d'un iso $i_\ell \cong i_r$ quelconque suffit, ce qui est facile à vérifier dans les exemples !

  Fait (théorème de rectification): les axiomes 1-4 impliquent l'existence d'isomorphismes canoniques $\theta_i \colon i_\ell \cong i_r$ pour tout i, satisfaisant des compatibilités en plus avec les adjonctions et uniquement déterminés.

Axiome 3 de CB : tout carré iso-comma (pseudo-pullback) γ dans gpd_f définit, via le 2-foncteur $\mathcal{M}$ et les adjonctions gauche/droite, deux "mates" γ_ℓ et $(\gamma^{-1})_r$:

$$\gamma = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ \bullet \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & \bullet \arrow[dl, "j"] \\ & \bullet & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \gamma_\ell = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dr, "q_\ell"] & \\ \bullet \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "i_\ell"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad (\gamma^{-1})_r = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \bullet \arrow[dr, "q_r"] & \\ \bullet \arrow[ur, "p^*"] \arrow[dr, "i_r"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow"] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "j^*"'] & \end{tikzcd}$$

L'axiome 3 demande que les deux soient inversibles : $j^* i_\ell \cong q_\ell p^*$ and $j^* i_r \cong q_r p^*$.
Fait : via les isos de rectification θ_i et θ_j, ils sont inverses : $(\gamma_\ell)^{-1} = (\gamma^{-1})_r$.

Exemple fondamental : pour deux sous-groupes $K, L \leq G$

$$\text{iso-comma} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & (i/j) \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ K \arrow[dr, "i"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}"] & & L \arrow[dl, "j"] \\ & G & \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad (i/j) \simeq \coprod_{[g] \in L \backslash G / K} L \cap {}^{g}K$$

on obtient la formule de Mackey !

Rmq : le groupoïde d'iso-comma (i/j) et les isos de CB sont canoniques, tandis que cette décomposition dépend de choix.

Exemples : les 2-foncteurs de Mackey sont partout

Il existe un 2-foncteur de Mackey $\mathcal{M}$ pour chacune des familles suivantes de catégories additives (en fait, abéliennes ou triangulées) :

- **En théorie des représentations linéaires** :
  $\mathcal{M}(G) = mod\, kG$, $Mod\, kG$, $D^b(mod\, kG)$, $D(Mod\, kG)$, $\underline{mod}(kG)$...
- **En topologie** :
  $\mathcal{M}(G) = Ho(\mathcal{S}p^G)$, la catégorie homotopique équivariante des G-spectres.
- **En géométrie non-commutative** :
  $\mathcal{M}(G) = KK^G$ or E^G, la théorie équivariante de Kasparov ou la E-théorie de Higson-Connes des C*-algebres.
- **En géométrie** (défini localement pour un groupe fixé G) :
  X : un espace localement annelé (e.g. un schéma) muni d'une G-action.
  $\forall\, H \leq G$, $\mathcal{M}(H) = Sh(X /\!\!/ H)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules H-équivariants.

  Variantes : la catégorie dérivée $D(Sh(X /\!\!/ H))$, ou les faisceaux constructibles, ou cohérents si X est un schéma noethérien, etc.

Monadicité

OK... Qu'est-ce qu'on peut démontrer avec ces axiomes ?

Parmi les bonnes propriétés des isos canoniques θ_i, on peut démontrer que l'ambijonction à chaque $i\colon H \to G$ a la **propriété de Frobenius spéciale** :

$$\Big(\ \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(H)} \overset{\text{unité}}{\Longrightarrow} i^* i_\ell \overset{\theta_i}{\cong} i^* i_r \overset{\text{counité}}{\Longrightarrow} \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(H)}\ \Big) \quad = \quad \mathrm{id}$$

Par une version "separable" du critère de monadicité de Beck, ceci entraine :

Co/monadicity of restrictions [Balmer-D. 2020]

Supposons que $\mathcal{M}$ prends ses valeurs dans les catégories idempotent-complètes. Pour tout $i\colon H \to G$, l'adjunction $i^* \dashv i_r$ est monadique and $i_\ell \dashv i^*$ comonadique :

$$\mathcal{M}(G)^{i_\ell i^*} \overset{\sim}{\leftarrow} \mathcal{M}(H) \overset{\sim}{\to} \mathcal{M}(G)^{i_r i^*}$$

On peut ainsi extraire la "petite" catégorie $\mathcal{M}(H)$ à partir de la "grande" $\mathcal{M}(G)$.

L'approche motivique

Un 2-foncteur de Mackey est ***k*-linéaire** s'il prend ses valeurs parmi les catégories et les foncteurs k-linéaires (sur un anneau commutatif k).

Théorème (les 2-motifs de Mackey)

Il y a une 2-categorie Mot_k qui transforme les 2-foncteurs de Mackey k-linéaires en 2-foncteurs k-linéaires sur Mot_k :

$$\begin{tikzcd} gpd_f^{op} \arrow[rr, "\forall\, \mathcal{M} \ \text{de Mackey}"] \arrow[d, "\text{univ}"'] & & ADD_{k\text{-lin}} \\ Mot_k \arrow[urr, dashed, "\exists!\ \widehat{\mathcal{M}}\ \ k\text{-linéaire}"'] & & \end{tikzcd}$$

Corollaire

L'anneau des 2-endomorphismes $End_{Mot_k}(\mathrm{Id}_G)$ du (motif du) groupe G agit sur la catégorie $\mathcal{M}(G)$, pour tout 2-foncteur de Mackey k-linéaire $\mathcal{M}$.

La 2-catégorie Mot_k admet des constructions concrètes (via des spans, bimodules, ou diagrammes à ficelles) : on peut y calculer !

Décompositions motiviques

Voici un calcul concret :

L'anneau des endomorphismes motivique

$End_{Mot_k}(\mathrm{Id}_G)$ est isomorphe à la ***k*-algèbre de Burnside croisée** [Yoshida '97]

$$B^c_k(G) = k \otimes_{\mathbb{Z}} K_0\big(\ G\text{-}sets/G^{conj},\ \text{un certain } \otimes \text{ tressé }\big)$$

ou concrètement : le k-module libre fini engendré par les classes de G-conjugaison des pairs (H, a) avec $H \leq G$ and $a \in C_G(H)$, avec le produit définit par :

$$(K, b) \cdot (H, a) = \sum_{[g] \in K \backslash G / H} (K \cap {}^g H, bgag^{-1})\,.$$

Exemple : il est bien connu que **l'anneau de Burnside** $B(G) = K_0(G\text{-set})$ agit sur $\mathcal{M}(G) = Ho(\mathcal{S}p^G)$, car $B(G) \cong End(S^0)$ et la sphere S^0 est l'unité tensorielle.

Mais l'anneau plus gros $B^c_{\mathbb{Z}}(G)$ agit aussi, d'où une décomposition plus fine (après extension des coefficients $\mathbb{Z} \to k \ \ldots$) :

$$Ho(\mathcal{S}p^G_k) \simeq \bigoplus_{e \in PrimIdemp(B^c_k(G))} e \cdot Ho(\mathcal{S}p^G_k).$$

La formule de Cartan-Eilenberg

Un résultat classique reliant la cohomologie et la fusion dans les groupes :

Formule des éléments stables [Cartan-Eilenberg '56]

Soit $0 < p = \mathrm{char}(k) \mid |G|$. L'algèbre de cohomologie est calculée par la limite

$$H^*(G;k) \cong \lim_{P \in \mathcal{F}_p(G)} H^*(P;k)$$

sur la **catégorie de *p*-fusion** $\mathcal{F}_p(G) = \begin{cases} \text{objets : } p\text{-sous-groupes de } G \\ \text{morphismes : incl. \& conj. entre eux} \end{cases}$

Mais la cohomologie n'est qu'un petit morceau de la catégorie dérivée de G :

$$H^*(G;k) \cong \mathrm{Hom}_{D^b(mod\,kG)}(k, \Sigma^* k)\,.$$

Question : est-ce que $D^b(mod\,kG)$ admet une reconstruction similaire à partir de $D^b(mod\,kP)$ pour les p-sous-groupes $P \leq G$, avec les restrictions & conjugations ?

Oui !

$\mathcal{M}$ est dit **cohomologique** si $(\mathrm{Id}_{\mathcal{M}(G)} \Rightarrow i_r i^* \overset{\theta^{-1}}{\cong} i_\ell i^* \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{M}(G)}) = [G:H]\,\mathrm{id}$ pour toute inclusion de sous-groupe $i\colon H \to G$.

Formule de Cartan-Eilenberg catégorifiée [Maillard '21]

Supposons $\mathcal{M}$ idempotent-complet et k-linéaire, avec k une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre. Si de plus $\mathcal{M}$ est cohomologique, il existe une équivalence de catégories

$$\mathcal{M}(G) \simeq \underset{P \in \mathcal{O}_p(G)}{\mathrm{bilim}} \mathcal{M}(P)$$

où la bilimite est calculé dans $ADD_{k\text{-lin}}$ au-dessus de la **catégorie des *p*-orbites** :

$$\mathcal{O}_p(G) = \begin{cases} \text{objets : les orbites } G/P \text{ pour } P \leq G \text{ un } p\text{-sous-groupe} \\ \text{morphismes : les applications } G\text{-équivariantes entre elles.} \end{cases}$$

- $\mathcal{O}_p(G)$ raffine la catégorie de fusion $\mathcal{F}_p(G)$, qu'elle admet comme quotient.
- Exemples de $\mathcal{M}$ cohomologiques : $\mathcal{M} = mod(k-)$, $D^b(k-)$, and $\underline{mod}(k-)$.
- Aussi, les faisceaux équivariants sur une G-variété X sur k : $Sh(X /\!\!/ G)$ etc.
  Examples précédents : le cas $X = \mathrm{Spec}(k)$ muni de la G-action triviale ! ☺

L'équivalence de Green générale

Pour $\mathcal{M}$ un 2-foncteur de Mackey, notons :

- $\mathcal{M}(G;S) := \{M \mid M \text{ sommand de } \mathrm{Ind}(N) \text{ pour un } N \in \mathcal{M}(S)\} \overset{\text{pleine}}{\subset} \mathcal{M}(G)$ la sous-catégorie pleine des ***S*-objets**, pour $S \leq G$ un sous-groupe.
- $\mathcal{M}(G;\mathbb{S})$ de façon similaire pour un ensemble $\mathbb{S}$ de sous-groupes de G.

L'équivalence de Green [Balmer-D. 2021]

Soit $\mathcal{M}$ un 2-foncteur de Mackey (pour G), et $Q \leq H \leq G$ des groupes finis. Alors le foncteur d'induction induit une équivalence de catégories

$$\left(\frac{\mathcal{M}(H;Q)}{\mathcal{M}(H;\mathbb{X})}\right)^{\natural} \xrightarrow[\sim]{Ind_H^G} \left(\frac{\mathcal{M}(G;Q)}{\mathcal{M}(G;\mathbb{X})}\right)^{\natural}$$

où $\mathbb{X} = \{Q \cap {}^{g}Q \mid g \in G \smallsetminus H\}$ et où $(-)^{\natural}$ dénote la complétion idempotente.

- Ici les quotients $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ sont au sens des catégories additives.
- Dans les exemples, pas besoin de $(-)^{\natural}$, pour deux raisons différentes...

Supposons que $\mathcal{M}$ prends ses valeurs dans les catégories de **Krull-Schmidt** : tout object admet donc une unique décomposition en somme d'indécomposables.

Tout objet indécomposable $M \in \mathcal{M}(G)$ a un **vertex** : un sous-groupe $Q \leq G$, unique à moins de G-conjugaison, tel que $M \in \mathcal{M}(G; Q)$.

Corollaire (la correspondance de Green)

Si $\mathcal{M}$ est de Krull-Schmidt et $Q \leq H \leq G$ tels que $N_G(Q) \subseteq H$, on a une bijection

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{objets indéc. de } \mathcal{M}(H)\\ \text{de vertex } Q\end{array}} \underset{\text{“Res”}}{\overset{\text{“Ind”}}{\underset{\sim}{\rightleftarrows}}} \boxed{\begin{array}{c}\text{objets indéc. de } \mathcal{M}(G)\\ \text{de vertex } Q\end{array}}$$

où $N \in \mathcal{M}(H)$ correspond à $M \in \mathcal{M}(G)$ ssi $M \leq \mathrm{Ind}_H^G(N)$ ssi $N \leq \mathrm{Res}_H^G(M)$.

- Pour $\mathcal{M} = mod(k-)$ on récupère les cas classiques [J. A. Green '58, '64, '74]
- Exemples d'autres $\mathcal{M}$ de Krull-Schmidt :
  - $D^b(mod(k-))$, sur un corps k ou un anneau local gentil.
  - $Coh(X/\!\!/-)$ et $D^b(X/\!\!/-)$, les faisceaux cohérents équivariants sur X une G-variété algébrique régulière et propre sur un corps k.

Merci de votre attention !