Dualités entre l'algèbre et la géométrie

Ivo Dell'Ambrogio

Université de Lille 1

Journée de rentrée du Laboratoire Paul Painlevé

19 octobre 2012

“Dualités” algèbre - géométrie : partout dans les maths !

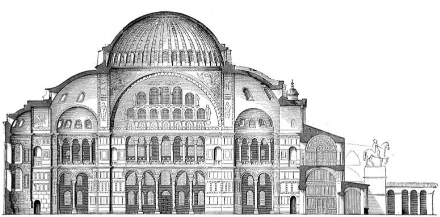
Un exemple connu par tous :

$$\boxed{\text{géométrie euclidienne}} \xleftarrow[\text{cartésiennes}]{\text{choix de coordonnées}} \!\!\!\!\xrightarrow{} \boxed{\text{algèbre vectorielle dans } \mathbb{R}^3}$$

déductions axiomatiques (sophistiquées) $\longleftrightarrow$ recettes calculatoires (faciles)

Imaginez-vous les ingénieurs travailler sans l'algèbre vectorielle !

Comme par exemple : Isidore de Milet, physicien et mathématicien, et Anthémius de Tralles, mathématicien Archimédien, quand ils bâtirent la cathédrale de Sainte Sophie (Hagia Sophia) à Costantinople, en 532-537 :



- Coordonnées :
  Descartes, *Discours sur la méthode*, 1637
  Fermat, *Ad locos planos et solidos isage*, 1636/1679
- Algèbre verctorielle : XIX^{e} siècle !

XIX^{e} siècle : graduelle algébrisation des mathématiques

- Boole ($\sim$1850), logicien, et Pierce (1880), logicien et philosophe.

  Formalisation des opération logiques de disjonction $\vee$ ("ou"), conjonction $\wedge$ ("et") et négation $\neg$ ("non") de propositions.
- **Question :** quelles lois charactérisent ces opérations ?

  Exemples : $\neg\neg(a) = a$

  $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

  $\neg(a \vee b) = \neg(a) \wedge \neg(b)$ (loi de De Morgan)

  ... quoi d'autre ?
- **Remarque :** Déjà à cette époque, on savait que la question revenait précisément à vouloir capturer l'algèbre des propriétés, ou des classes. Les opérations $\vee, \wedge, \neg$ correspondent alors aux opérations ensemblistes $\cup, \cap, (-)^c$.

Une solution

- Depuis Boole & Co : Si X est un ensemble, les opérations $\cup, \cap, (-)^c$ font devenir l'ensemble puissance $\mathcal{P}(X)$ une **algèbre de Boole** : un ensemble ordonné $(B, \leqslant)$ avec élément plus petit (0) et plus grand (1), avec sup ($\vee$) et inf ($\wedge$) binaires ($\Rightarrow$ c'est un treillis) qui se distribuent l'un l'autre, et avec un complément ($\neg$) pour tout élément.

Théorème (Lindenbaum-Tarski 1935)

Une algèbre de Boole B est isomorphe à l'algèbre des sous-ensembles d'un ensemble X (en symboles : $B \cong \mathcal{P}(X)$) ssi elle est complète et atomique.

- B est **complète** : le $\sup_i b_i$ et le $\inf_i b_i$ sont définis pour chaque famille $\{b_i\}_i$ d'éléments.
- B est **atomique** : pour tout $0 \neq b \in B$, il exist un $a \in B$ minimal (un atome) tel que $a \leqslant b$.

La réponse amène des nouvelles questions

On obtient la dualité :

$$\begin{tikzcd} \text{ensembles} \arrow[r, bend left, "X \mapsto \mathcal{P}(X)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \begin{array}{c}\text{algèbres de Boole}\\ \textcolor{red}{\text{complètes}} \text{ et } \textcolor{red}{\text{atomiques}}\end{array} \arrow[l, bend left, "\{\text{atomes de } B\} \leftarrow\!\shortmid B"] \end{tikzcd}$$

Formulation en termes moderne :
"dualité" $=$ équivalence de catégories contravariante.

- Marshall Stone (1930's), un analyste fonctionnel (!) :
  Certains opérateurs sur un espace de Hilbert (des projections commutant les unes avec les autres) forment une algèbre de Boole . . . ni complète, ni atomique !
- **Question :** comment représenter "concrètement" de telles algèbres de Boole ? En général, qu'est-ce qu'il faut mettre à gauche ?

Stone introduit la topologie

- **1ère idée :** une algèbre de Boole est *la même chose* qu'un anneau commutatif dont tout élément est idempotent : $b^2 = b$ ("anneau de Boole"). Traduction : $ab = a \wedge b$, $a + b = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$, et à l'invers $a \vee b = a + b - ab$, $a \wedge b = ab$, $\neg a = 1 - a$.
- **2ème idée :** on enrichit l'ensemble X en y rajoutant une topologie.

Théorème (Stone 1935-6)

La dualité de Lindenbaum-Tarski admet la généralisation suivante :

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{espaces compactes complètement discontinus}} \arrow[r, bend left, "X \mapsto \mathrm{Clopen}(X)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\text{anneaux de Boole } (= \text{alg. de Boole})} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Max}(B) \leftarrow B"] \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Clopen}(X) = \{ Y \subseteq X \mid Y \text{ ouvert et fermé } \}$ avec $\cup$ et $\cap$.
$\mathrm{Max}(B) = \{\text{idéaux maximaux de } B\} = \mathrm{Spec}(B)$, avec la topologie de Zariski.

Stone introduit la topologie

Théorème (Dualité de Stone 1935-6)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\text{espaces compactes}\\ \text{complètement discontinus}\end{array}} \arrow[r, bend left, "X \mapsto \mathrm{Clopen}(X)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{anneaux de Boole}\\ (= \text{alg. de Boole})\end{array}} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Max}(B) \leftarrow\!\shortmid B"] \end{tikzcd}$$

- Selon P.T. Johnstone : c'est peut-être le premier exemple non-trivial d'une équivalence de catégories démontrée explicitement en détails (10 ans avant que Eilenberg et Mac Lane définissent la notion!).
- Stone trouve les applications suivantes :
  - Compactification de Stone-Čech d'un espace complètement régulier.
  - Le théorème d'approximation de Stone-Weierstrass.

1ère généralisation : dualité de Gelfand

- Il y a une abondance d'espaces compactes intéressants, pas nécessairement complètement discontinus : Variété topologiques compactes, sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$, ...
- **Question :** quelles sortes d'algèbres faut-il mettre à droite, si on veut capturer *tous* les espaces compactes ?

Théorème (M. Stone 1940-1 $_{\mathbb{R}}$, I.M. Gelfand 1939-41 $_{\mathbb{C}}$)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{espaces compactes}} \arrow[r, bend left, "X \mapsto \mathrm{C}(X)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\text{C*-algèbres unitales commutatives}} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Max}(A) \leftarrow\!\shortmid A"] \end{tikzcd}$$

$1^{\text{ère}}$ généralisation : dualité de Gelfand

Théorème (Stone 1940-1 $_{\mathbb{R}}$, Gelfand 1939-41 $_{\mathbb{C}}$)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\text{espaces compactes}} \arrow[r, bend left, "X \mapsto \mathrm{C}(X)"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\text{C*-algèbres unitales commutatives}} \arrow[l, bend left, "\mathrm{Max}(A) \leftarrow\!\shortmid A"]
\end{tikzcd}
$$

Explications (variante sur $\mathbb{C}$) :

- C*-algèbre A : une algèbre de Banach complexe $(A, \|\cdot\|)$ avec $\|ab\| \leqslant \|a\|\|b\|$ et $\|1\| = 1$, munie d'une involution $a \mapsto a^*$ t.q. $a^{**} = a$, $(ab)^* = b^*a^*$, $(za+b)^* = \bar{z}a^* + b^*$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$.
- $\mathrm{C}(X) =$ algèbre des fonctions continues $X \to \mathbb{C}$; $f^*(x) := \overline{f(x)}$.
- $\mathrm{Max}(A) = \{$idéaux maximaux de $A\}$ avec la topologie de Zariski $\cong \{$charactères $\chi : A \to \mathbb{C}\}$ avec la topologie faible-* .

$1^{\text{ère}}$ généralisation : dualité de Gelfand

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{espaces compactes}} \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{Gelfand}", "\cong"'] & & \boxed{\text{C*-algèbres unitales commutatives}} \arrow[d, phantom, "\cap"] \\
?? & & \boxed{\text{C*-algèbres}}
\end{tikzcd}$$

- **Exemples :** $A = M_n(\mathbb{C})$. Plus en générale : $A = \mathcal{L}(H) = \{$opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert $H\}$, avec les opérations : $ab = a \circ b$, $a^* =$ opérateur adjoint, $\|a\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|av\|}{\|v\|}$. Aussi : $A \subseteq \mathcal{L}(H)$ une sous-algèbre fermée par $\| \cdot \|$ et $(\cdot)^*$.
- **Question :** est-ce qu'on peut aussi représenter les C*-algèbres *non-commutatives* de façon concrète ?

Théorème (Gelfand-Naimark 1943)

Chaque C*-algèbre est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$.

1ère généralisation : dualité de Gelfand

On obtient un véritable croisement d'idées, permettant le transfer d'intuition et techniques entre différents domaines.

$$\begin{tikzcd} \text{géométrie} \arrow[rr, shift left] \arrow[dr, shift left] & & \text{algèbre} \arrow[ll, shift left] \arrow[dl, shift left] \\ & \text{analyse} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] & \end{tikzcd}$$

$2^{\text{ère}}$ généralisation de Stone : Grothendieck !

Dualité de Stone :

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\text{espaces compactes}\\ \text{complètement discontinus}\end{array}} \arrow[r, leftrightarrow, "X \mapsto \mathrm{Clopen}(X)", "\mathrm{Spec}(A) \mapsfrom A"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{anneaux commutatifs}\\ \color{red}{\text{de Boole}}\end{array}} \end{tikzcd}$$

- Qu'est-ce qui correspond "à gauche" aux anneaux commutatifs quelconques?
- L'espace topologique $X = \mathrm{Spec}(A)$ ne suffit plus . . . Mais on peut le munir d'une *géométrie* (= faisceaux d'anneaux "de fonctions sur X").

Théorème / définition (A. Grothendieck, depuis 1959)

$$\begin{tikzcd} \boxed{\begin{array}{c}\text{schémas affines}\\ (X, \mathcal{O}_X)\end{array}} \arrow[r, bend left, "\text{sections globales}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{anneaux}\\ \text{commutatifs}\end{array}} \arrow[l, bend left, "(\mathrm{Spec}\, A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, A}) \mapsfrom A"] \end{tikzcd}$$

Version classique

En géométrie algébrique sur $\mathbb{C}$ (ou sur n'importe quel autre corps algébriquement clos), on peut reformuler cette dualité de façon plus classique, et sans faisceaux, comme il suit :

Théorème ($\sim$ Nullstellensatz de Hilbert)

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{array}{c}\text{ensembles algébriques affines}\\ X = Z(f_1, \ldots f_r) \subseteq \mathbb{C}^n\end{array}} \arrow[r, bend left, "I := \{f \mid f|_X \equiv 0\}"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{anneaux affines}\\ A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I\end{array}} \arrow[l, bend left, "X := Z(I)"]
\end{tikzcd}$$

Références :

- P.T. Johnstone, *Stone Spaces*, 1982, Cambridge Univ. Press.
- (Nombreuses autres références *ibid.*)

Merci pour votre attention !